

## Amsterdam University of Applied Sciences

### Gezamenlijk redeneren en het valideren van wiskundige ideeën

*een case studie*

Palha, Sonia

**Publication date**  
2017

[Link to publication](#)

#### **Citation for published version (APA):**

Palha, S. (2017). *Gezamenlijk redeneren en het valideren van wiskundige ideeën: een case studie*. Paper presented at Onderwijs research dagen 2017, Antwerpen, Belgium.

#### **General rights**

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

#### **Disclaimer/Complaints regulations**

If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please contact the library: <https://www.amsterdamuas.com/library/contact/questions>, or send a letter to: University Library (Library of the University of Amsterdam and Amsterdam University of Applied Sciences), Secretariat, Singel 425, 1012 WP Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

## **Inleiding Symposium: Wiskundig denken in het Nederlandse onderwijs**

In de nieuwe havo en vwo curricula wiskunde voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs is expliciet aandacht voor wiskundig denken in de vorm van wiskundige denkactiviteiten (cTWO, 2012). Dit sluit aan bij internationaal onderzoek en beleid (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010; Schoenfeld, 1985). Er zijn verschillende modellen voor wiskundig denken ontwikkeld en onderzocht en er is veel onderzoek gedaan naar hoe het onderwijs ingericht zou moeten worden om het wiskundig denken te ontwikkelen (cTWO, 2012; Drijvers, 2015; Kilpatrick et al., 2001; Schoenfeld, 1985). Voor veel docenten, auteurs van schoolboeken en examenmakers is het echter moeilijk om aandacht te besteden aan het ontwikkelen en toetsen van alle onderdelen van wiskundig denken, zoals probleemoplossen, logisch redeneren, modelleren en abstraheren, naast het aanleren en toetsen van procedurele vaardigheden.

In dit symposium worden de resultaten van diverse onderzoeken met betrekking tot het zichtbaar maken en bevorderen van wiskundig denken in het Nederlandse onderwijs gepresenteerd en aan elkaar verbonden. In de eerste bijdrage wordt een overzicht geschetst van de implementatie van wiskundige denkactiviteiten in de nieuwe bovenbouw curricula voor havo en vwo wiskunde. De aandacht is vooral gericht op de rol die wiskundig denken krijgt toebedeeld in de examens en in de professionalisering van docenten. De andere drie bijdragen richten zich op diverse facetten van wiskundig denken in verschillende onderwijssettings. In de tweede bijdrage wordt gerapporteerd over onderzoek naar wiskundig denken van individuele studenten tijdens het oplossen van problemen in de integraalrekening. De derde bijdrage heeft betrekking op wiskundig denken in een groepsdialoog tussen drie leerlingen. In de vierde bijdrage wordt het wiskundig denken in klassengesprekken over verschillende oplossingsmethoden zichtbaar gemaakt.

De structuur van de sessie is als volgt:

Inleiding, voorzitter (5 minuten)

Presentaties (elk 10 minuten + 5 minuten vragen):

- 1: De implementatie van wiskundig denken in de nieuwe curricula in Nederland
- 2: Wiskundige kennis en denkactiviteiten
- 3: Collectief redeneren en het valideren van wiskundige ideeën: een case studie
- 4: Wiskundig denken in klassengesprekken over verschillende oplossingsmethoden

Discussant (10 minuten)

Vragen en reacties zaal (15 minuten)

### **Presentatie 1: De implementatie van wiskundig denken in de nieuwe curricula in Nederland**

In 2015 zijn de wiskundecurricula voor havo en vwo in Nederland vanaf klas 4 vernieuwd. In deze vernieuwing spelen wiskundige denkactiviteiten een centrale rol. Het onderzoeksdoel is om na te gaan in hoeverre de implementatie hiervan daadwerkelijk plaatsvindt en welke factoren hierbij doorslaggevend zijn. Het theoretische kader omvat theorieën over curriculum vernieuwing (Kuiper, 2009), professionele ontwikkeling van docenten (Maass & Doorman, 2013) en wiskundig denken (Drijvers, 2015).

De studie, waarvan hier slechts deelresultaten worden gerapporteerd, is een retrospectieve analyse van het proces van curriculumvernieuwing. We gaan in op de rol van de centrale eindexamens en van de professionalisering van docenten door (1) een analyse van de examens op de pilotscholen en (2) een analyse van het huiswerk van docenten in professionaliseringscursussen.

De analyse van de centrale examens laat zien dat de pilotexamens bij de nieuwe curricula een groter beroep deden op wiskundig denken dan de reguliere examens, met een gemiddeld percentage van 32 tegen 12 (havo) en 50 tegen 33 (vwo). Op de 11 overlappende denkactiverende examenvragen was de p-waarde van pilotleerlingen gemiddeld ruim 5% hoger dan die van reguliere leerlingen. Wiskundig denken komt dus in meer voor in de centrale examens van de nieuwe curricula en de leerlingen van de pilotscholen lijken hierop wat beter te presteren dan leerlingen van reguliere scholen (Kodde-Buitenhuis, 2015). De resultaten van de analyse van het huiswerk van docenten in professionaliseringscursussen, dat bestond uit het ontwikkelen en uittesten van denkactiverend onderwijs, laten zien dat docenten er in de loop van de cursus beter in slagen om wiskundig denken in het onderwijs gestalte te geven (Drijvers, P., De Haan, D., & Doorman, ingediend).

Samengevat blijkt dat de implementatie van wiskundig denken in centrale examens inderdaad plaatsvindt en dat docenten tijdens professionaliseringsactiviteiten in toenemende mate in staat zijn wiskundig denken in hun onderwijs te bevorderen. Daarmee zijn twee belangrijke factoren in de implementatie van een dergelijke onderwijsvernieuwing geïdentificeerd: de toetsing en de docentvaardigheden.

De wetenschappelijke betekenis van deze studie is gelegen in de monitoring van de implementatie van curriculumvernieuwing, die er immers de achilleshiel van vormt. Daarnaast ligt het belang in het uitwerken en valideren van theorieën over wiskundig denken en de benodigde docentvaardigheden.

## **Presentatie 2: Wiskundige kennis en denkactiviteiten**

Wiskundeonderwijs moet niet alleen gaan over 'het kennen van bepaalde begrippen' en 'het kunnen uitvoeren van bepaalde rekenprocedures'. Van een wiskundig bekwame student zou je ook mogen verwachten dat die in staat is om complexe problemen op te lossen en zich nieuwe wiskundige concepten eigen te maken. Onderzoekers in de wiskundendidactiek pleiten al lang voor een brede kennisbasis waarin zowel parate kennis van wiskundige concepten en de verbanden tussen deze wiskundige concepten, als analytische en metacognitieve vaardigheden bij probleemoplossen aanwezig zijn (Kilpatrick et al., 2001; Schoenfeld, 1985; Van Streun, 2001). Desondanks lijkt het lastig om in het onderwijs aandacht te besteden aan deze aspecten.

Meer recent is er een andere benadering naar voren gekomen om het wiskundeonderwijs meer diepgang te geven. Zowel nationaal als internationaal wordt er nu nadrukkelijk aandacht gevraagd voor wiskundig denken in het onderwijs (cTWO, 2012; National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010). In Nederland worden wiskundige denkactiviteiten expliciet benoemd in de curricula van de nieuwe examenprogramma's voor havo en vwo.

Doel van dit promotieonderzoek is het ontwikkelen van een raamwerk waarin de kennisbasis en de wiskundige denkactiviteiten verbonden worden. De wisselwerking tussen probleemoplossen en kennis uitbreiden zal daarbij een centrale plek krijgen. Immers, uitbreiding van het repertoire van wiskundige concepten en het structureren van bestaande kennis vragen om goed gekozen

problemen en denkactiviteiten van leerlingen. En omgekeerd, om problemen op te kunnen lossen is een rijke kennisbasis nodig.

Een concrete invulling van dit raamwerk wordt geformuleerd in het domein van de integraalrekening. Daarmee zal begin 2017 empirisch onderzoek worden uitgevoerd op eerstejaars studenten van de universitaire wiskundeopleiding in Leiden. Aan Individuele studenten zal worden gevraagd om hardop na te denken over een serie problemen uit de integraalrekening die toenemend zijn in moeilijkheidsgraad. Daarnaast zal aan dezelfde studenten een sorteeropdracht worden voorgelegd waarbij kernbegrippen, kernprocedures en verschillende probleemttypen moeten worden gecategoriseerd. Het raamwerk zal gebruikt worden om de data te analyseren. Bij de serie problemen zal worden vastgesteld welke denkactiviteiten en heuristische methoden worden gebruikt. De sorteeropdracht is bedoeld om de kennisbasis van de student in kaart te brengen. Voor zowel studenten met goede studieresultaten als studenten met mindere studieresultaten zal er worden vastgesteld in welke mate de kennisbasis is ontwikkeld en in welke mate de denkactiviteiten worden toegepast. Op deze manier willen we onderzoeken of het raamwerk prestatieverschillen tussen studenten kan verklaren.

De wetenschappelijke relevantie van het raamwerk zit in het verbinden van de theorieën over een brede kennisbasis en de theorieën over wiskundig denken. Het raamwerk beoogd ook praktische relevantie. In een vervolgstudie zal namelijk worden gezocht naar mogelijkheden voor het ontwerpen en verbeteren van wiskundeonderwijs.

### **Presentatie 3: Gezamenlijk redeneren en het valideren van wiskundige ideeën: een case studie**

Het gezamenlijk oplossen van wiskundige problemen creëert de gelegenheid voor leerlingen om te leren redeneren. Doordat leerlingen aan elkaar uitleg geven, worden ze bewust van bestaande kennis en mogelijke misconcepties en kunnen ze daardoor eigen kennis aanpassen en aanvullen. Leerlingen kunnen elkaar ook helpen om uitspraken en aangedragen resultaten te verbeteren met wiskundige betekenis en richting wiskundig redeneren (Dekker, Elshout-Mohr, & Wood, 2006). Bij het oplossen van schooltaken omvat wiskundig redeneren cognitieve activiteiten zoals het herroepen van kennis, verbindingen maken tussen begrippen, wiskundige representaties gebruiken, generaliseren van concrete situaties en conclusies trekken op basis van wiskundige eigenschappen (Lithner, 2008; Schoenfeld, 1992). Veel onderzoek naar gezamenlijk redeneren betreft de manier waarop leerlingen op elkaars ideeën voortbouwen maar er is weinig bekend over hoe leerlingen deze ideeën valideren (Francisco, 2013). Het doel van dit onderzoek is meer inzicht krijgen in dit proces. Validatieprocessen bij wiskunde zijn voornamelijk onderzocht in de context van wiskundige bewijzen (Selden & Selden, 2003) en betreffen een zekere vorm van evaluatie zoals het beoordelen van wat goed is of fout, gevoelens van onzekerheid, twijfel en ondervraging van gezag. In deze studie breiden we deze definitie uit naar redenering in een collaboratieve setting en exploreren we hoe dit proces verloopt binnen een groep leerlingen zonder toezicht van de docent.

We gebruiken data uit een eerder project waarin vwo 5 leerlingen met wiskunde B werken aan een verrijkende lessenserie van 8 weken. Het lesmateriaal bestaat uit open gezamenlijke taken die 13 van 25 reguliere lessen vervangen. In de reguliere lessen werken de leerlingen individueel uit het tekstboek en de docent geeft klassikaal uitleg. De case studie betreft één (random gekozen) groep van drie leerlingen. De groepsdialoog tijdens het gezamenlijk oplossen van de opdrachten werd vastgelegd in video (3400 uitspraken in 10 lessen). Deze opnamen, de transcripties en het leerlingenwerk vormen de data van de studie.

De uitkomsten laten zien dat de leerlingen waren betrokken bij het valideren van elkaars ideeën. Voorbeelden van situaties die aanleiding gaven tot valideren bevatten o.a. het denken over gezichtspunten van andere leerlingen, jezelf of anderen proberen te overtuigen, het vinden van de juiste oplossing en het beter willen verwoorden van de gevonden oplossing. Deze situaties werden door de groep gegenereerd en het gebruik van open taken lijkt dit te kunnen uitlokken. Het gezamenlijk oplossen heeft niet altijd geleid tot valide oplossingen. Leerlingen zouden meer gelegenheid moeten krijgen in het reguliere onderwijs om te oefenen in het valideren van hun eigen en andermans redeneringen.

#### **Presentatie 4: Wiskundig denken in klassengesprekken over verschillende oplossingsmethoden**

In de nieuwe havo en vwo curricula wiskunde voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs is expliciet aandacht voor wiskundig denken (cTWO, 2012). Voor veel docenten is het echter moeilijk om het aanleren van procedurele kennis aan te vullen met het stimuleren van andere facetten van wiskundig denken zoals logisch redeneren en probleemoplossen (cTWO, 2012). Voor het ontwikkelen van wiskundig denken is het van belang dat leerlingen geconfronteerd worden met problemen: vraagstukken waarbij een oplossingsmethode niet direct duidelijk is en die op verschillende manieren opgelost kunnen worden (cTWO, 2012; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Klassengesprekken over verschillende oplossingsmethoden helpen leerlingen om hun eigen denken te expliciteren en te vergelijken met dat van anderen (Stein et al., 2008; Walshaw & Anthony, 2008). De rol van de docent in een klassengesprek is van grote invloed op het ontwikkelen van wiskundig denken bij de leerlingen (Stein et al., 2008; Walshaw & Anthony, 2008). Een docent moet bijvoorbeeld een balans vinden tussen het bouwen op de ideeën van de leerlingen zelf en het sturen naar algemene wiskundige inzichten. Er is nog niet veel bekend over hoe docenten zelf wiskundig denken identificeren in klassengesprekken. We onderzoeken of er in klassengesprekken over verschillende oplossingsmethoden wiskundig denken geïdentificeerd kan worden, vanuit theoretisch perspectief en vanuit het perspectief van docenten zelf.

Voor dit onderzoek is een docentontwikkelteam (DOT) samengesteld waarin vier ervaren wiskundedocenten en twee onderzoekers systematisch lessen ontwikkelen. De docenten doen vrijwillig mee en worden door hun schoolleiding gesteund. Bij het ontwerp focussen we op het inzetten van problemen en besteden we aandacht aan klassengesprekken. Tijdens de uitvoering worden video's gemaakt en observaties gedaan van de klassengesprekken. De geprotocolleerde klassengesprekken worden door de onderzoeker geanalyseerd aan de hand van bestaande modellen voor wiskundig denken (cTWO, 2012; Kilpatrick et al., 2001; Schoenfeld, 1985) en worden in de DOT bijeenkomsten gebruikt voor de evaluatie van het ontwerp. De evaluatiegesprekken worden opgenomen en geanalyseerd om inzicht te krijgen in het perspectief van de docenten op wiskundig denken in klassengesprekken en hun rol daarbij.

We verwachten inzicht te krijgen in de mate waarin bepaalde facetten van wiskundig denken in deze lessen plaatsvinden en de rol van de docenten hierin. We verwachten bijvoorbeeld dat 'redeneren' veel voorkomt in een klassengesprek over oplossingsmethoden. Aan de hand van wat we zien gebeuren in de klassengesprekken en de DOT gesprekken kunnen we een raamwerk ontwikkelen voor het identificeren van wiskundig denken dat aansluit bij het perspectief van docenten.

De wetenschappelijke betekenis van dit onderzoek zit voornamelijk in het zichtbaar maken van wiskundig denken in klassengesprekken en het meenemen van het perspectief van de docent hierin.

## Referenties

- cTWO. (2012). *Denken & Doen*. Retrieved from <http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf>
- Dekker, R., Elshout-Mohr, M., & Wood, T. (2006). How children regulate their own collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, 62(1), 57–79. <http://doi.org/10.1007/s10649-006-1688-4>
- Drijvers, P., De Haan, D., & Doorman, M. (ingediend). Scaling up mathematical thinking; a case study on the implementation of curriculum reform in the Netherlands.
- Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT*. Inaugurale rede. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Francisco, J. M. (2013). Learning in collaborative settings: Students building on each other's ideas to promote their mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 417–438. <http://doi.org/10.1007/s10649-012-9437-3>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it Up*. Retrieved from <http://www.nap.edu/catalog/9822/adding-it-up-helping-children-learn-mathematics>
- Kodde-Buitenhuis, J. W. (2015). *Wiskundig denken in de pilotexamens van de nieuwe wiskundecurricula havo/vwo*. Intern rapport. Arnhem: Cito.
- Kuiper, W. (2009). *Curriculumevaluatie en verantwoorde vernieuwing van bètaonderwijs*. Inaugurale rede. Enschede/Utrecht: SLO/Utrecht University.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276. <http://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Maass, K., & Doorman, M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 887–899. <http://doi.org/10.1007/s11858-013-0505-7>
- National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from <http://www.corestandards.org/>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning To Think Mathematically : Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook on Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36. <http://doi.org/10.2307/30034698>
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. <http://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Van Streun, A. (2001). Het denken bevorderen. s.n. Retrieved from <http://www.rug.nl/research/portal/files/14560113/vanstreun.pdf>
- Walshaw, M., & Anthony, G. (2008). The Teacher 's Role in Classroom Discourse : A Review of Recent Research Into Mathematics Classrooms. *Review of Educational Research*, 78(3), 516–551.